جامعة الوادي

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مقياس: برمجيات احصائية حرة

محاضرة بعنوان

محاضرة: منهجية جوهانسون للتكامل المشترك (Johansen Cointegration Methodology)

إعداد: د. عثمان مديني

2025 _ 2026

1. مقدمة: لماذا ننتقل من إنجل-غرانجر إلى جوهانسون؟

تعلمنا في المحاضرة السابقة منهجية "إنجل–غرانجر"، والتي رغم قوتها، تعاني من قصورين أساسيين عند التعامل مع الواقع المالي المعقد:

القصور الاستيعابي: تقتصر على معالجة متغيرين اثنين فقط.

مشكلة التحيز (الداخلية): تفترض مسبقاً وجود متغير "تابع" ومتغير "مستقل"، واعتماداً على من تختار ليكون التابع، قد تتغير النتيجة الإحصائية.

الحل: قدم العالمان Søren Johansen و Katarina Juselius (1990) منهجية متكاملة تجاوزت هذه العيوب. منهجية جوهانسون صُممت خصيصاً للتعامل مع ثلاثة متغيرات فأكثر، وتعتمد على نظام مصفوفات حيث تُعامل جميع المتغيرات كمتغيرات "داخلية" (Endogenous) تؤثر وتتأثر ببعضها البعض في نفس الوقت دون افتراض مسبق للتبعية.

2. الفكرة الأساسية والبناء الرياضي

تعتمد منهجية جوهانسون على الإطار الرياضي لـ نموذج الانحدار الذاتي للمتجهات (VAR – Vector Autoregression). بدلاً من معادلة واحدة، يقوم النموذج ببناء نظام متزامن من المعادلات لجميع السلاسل الزمنية.

الفكرة الجوهرية تكمن في تحديد ما يُسمى بـ رتبة المصفوفة (r – Matrix Rank) لمصفوفة المعلمات في الأجل الطويل (مصفوفة $\prod$):

- إذا أدخلنا عدداً من السلاسل الزمنية مقداره (n).
- فإن جوهانسون يبحث عن عدد أشعة التكامل المشترك (Cointegrating Vectors)، والتي تمثل مسارات التوازن المستقلة بين هذه السلاسل.
- يمكن للنموذج أن يكتشف من 0إلى n−1 علاقة تكامل مشترك. (مثال: إذا كنا ندرس 4 أسواق مالية، قد نجد ما يصل إلى 3 مسارات توازنية تربطها ببعضها).

3. الشروط الرياضية والقياسية القبلية

قبل تطبيق اختبار جوهانسون، يجب التحقق بصرامة من الشروط التالية:

1. تطابق درجة الاستقرار: تماماً مثل إنجل–غرانجر، يجب أن تكون جميع السلاسل المدروسة متكاملة من الدرجة الأولى I(1) (غير مستقرة في مستوياتها، ومستقرة بعد أخذ الفرق الأول).
2. تحديد فترات الإبطاء المثلى (Optimal Lags): يعتبر جوهانسون حساساً جداً لفترات الإبطاء. يجب استخدام معايير المعلومات (مثل معيار AIC أو SIC أو HQ) لتحديد فترات الإبطاء المثلى لنموذج VAR الأساسي قبل البدء.
3. غياب الارتباط الذاتي: يجب التأكد من أن بواقي نموذج VAR المقدر لا تعاني من مشكلة الارتباط الذاتي المتسلسل.

4. إحصائيات الاختبار (كيف نقرأ النتائج؟)

يعتمد جوهانسون على دالة "الإمكانية العظمى" (Maximum Likelihood) لتقدير المصفوفات، ويفرز إحصائيتين أساسيتين لاتخاذ القرار بشأن عدد علاقات التكامل (r):

- **أ. إحصائية الأثر (Trace Statistic):**

تختبر الفرضية العدمية القائلة بأن عدد أشعة التكامل المشترك هو أقل من أو يساوي r، مقابل الفرضية البديلة بأن عددها أكبر من r

- **ب.** إحصائية القيمة الذاتية العظمى (Maximum Eigenvalue Statistic):

تختبر الفرضية العدمية القائلة بأن عدد أشعة التكامل هو بالضبط r، مقابل الفرضية البديلة بأن عددها هو r+1.

قاعدة القرار: نقوم بمقارنة القيمة المحسوبة لهاتين الإحصائيتين مع القيم الحرجة (Critical Values). إذا كانت القيمة المحسوبة أكبر من القيمة الحرجة، نرفض الفرضية العدمية وننتقل للرتبة التي تليها، حتى نصل إلى نقطة نقبل فيها الفرضية العدمية، وتلك النقطة تحدد عدد العلاقات.

5. التطبيق المالي ونموذج تصحيح الخطأ الموجه (VECM)

إذا أثبت اختبار جوهانسون وجود علاقة تكامل مشترك واحدة على الأقل (r 1)، فهذا يثبت التوازن طويل الأجل. للانتقال إلى دراسة الأجل القصير وسرعة العودة إلى التوازن، ننتقل من نظام (VAR) التقليدي إلى نموذج تصحيح الخطأ الموجه (Vector Error Correction Model – VECM).

المعادلة المبسطة لنموذج VECM هي:

$$\Delta Y_t = \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + ... + \Gamma_{k-1} \Delta Y_{t-k+1} + \Pi Y_{t-1} + u_t$$

.

حيث:

- \Delta Y_t: مصفوفة الفروق الأولى للمتغيرات (تمثل الأجل القصير).
- \Gamma: مصفوفة معلمات الأجل القصير.
- {\Pi Y_{t-1}: هذا هو حد تصحيح الخطأ (Error Correction Term) الذي يمثل الأجل الطويل. معاملاته تقيس سرعة استجابة الأسواق أو المتغيرات للصدمات لتعود إلى مسارها التوازني.

خلاصة اولية :

منهجية جوهانسون هي الأداة الأقوى في الترسانة القياسية لدراسة محافظ الاستثمار المتنوعة، العلاقات النقدية الدولية، وتحليل الأسواق المتكاملة، لأنها لا تكتفي بإخبارك بوجود توازن، بل ترسم لك خريطة كاملة لعدد هذه التوازنات وطبيعة تداخلها دون تحيز مسبق.

الفلسفة القياسية للتكامل المشترك: منهجية جوهانسون من النظرية إلى القرار

مقدمة: لماذا نحتاج إلى التكامل المشترك؟

في عالم الاقتصاد القياسي للسلاسل الزمنية، لطالما واجه الباحثون كابوس "الانحدار الزائف" (Spurious Regression) عند التعامل مع متغيرات مالية غير مستقرة. منهجية جوهانسون (Johansen, 1988) لم تأتِ فقط لتعالج هذه المشكلة، بل لتقدم إطاراً رياضياً عبقرياً يختبر ما إذا كانت هذه السلاسل العشوائية والمتمردة في المدى القصير، تمتلك "جاذبية خفية" تجبرها على التحرك معاً نحو مسار توازني في المدى الطويل.

المحور الأول: المحرك الرياضي (القيم الذاتية $\lambda\$)

لا تبدأ منهجية جوهانسون باختبار الفرضيات مباشرة، بل تبدأ بحل مصفوفات معقدة لاستخراج ما يُعرف بـ القيم الذاتية (Eigenvalues).

- المعنى الرياضي: هي أرقام تتراوح بين الصفر والواحد $0 \le \lambda \le 1$.
- المعنى الاقتصادي: تمثل القيمة الذاتية "قوة المغناطيس" أو قوة التجاذب بين المتغيرات.
  - إذا كانت λ قريبة من الصفر: انعدام الجاذبية، والمتغيرات مستقلة تماماً.
  - إذا كانت λ كبيرة (تبتعد عن الصفر): وجود ترابط هيكلي قوي يسحب المتغيرات نحو التوازن.

يتم ترتيب هذه القيم تنازلياً ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$)، ليتم اختبارها واحدة تلو الأخرى.

المحور الثاني: صراع الفرضيات (الأثر مقابل القيمة العظمى)

لتحويل هذه القيم الذاتية إلى قرارات إحصائية، يقدم جوهانسون اختبارين متوازيين، يختلفان في الفلسفة ويتفقان غالباً في النتيجة:

1. اختبار إحصائية الأثر (Trace Test): المقاربة التراكمية

الفلسفة: يختبر هذا الاختبار النظام بنظرة شمولية. يقوم بتجميع أوزان كل القيم الذاتية المتبقية في "سلة واحدة" ليرى ما إذا كان مجموعها يمتلك دلالة إحصائية كافية لكسر الفرضية العدمية.

الفرضيات: يبحث دائماً عن "أكثر من" حد معين.

H_0: عدد علاقات التكامل هو r أو أقل.

H_1: عدد علاقات التكامل أكبر من r.

2. اختبار القيمة العظمى (Max-Eigen Test): المقاربة الحدية

الفلسفة: اختبار صارم ومجهري. لا يكترث للتجميع، بل يختبر قوة كل مسار (قيمة ذاتية) على حدة بشكل منفرد.

الفرضيات: يبحث عن علاقة إضافية "واحدة بالضبط".

H_0: عدد علاقات التكامل هو r بالضبط.

H_1: عدد علاقات التكامل هو r + 1 بالضبط.

(ملاحظة منهجية: في حالة تعارض الاختبارين، يميل الباحثون إلى اعتماد نتيجة القيمة العظمى لكونها أكثر صرامة وتحفظاً ضد تقدير علاقات وهمية).

المحور الثالث: لغز القيم الحرجة ودرجات الحرية العشوائية

من أكثر المفاهيم دقة في هذه المنهجية هي كيفية تحديد القيمة الحرجة (الجدولية) من جداول Osterwald–Lenum. الجداول لا تعتمد على العدد الكلي للمتغيرات، بل تعتمد على معادلة: (n − r).

- **التفسير الحركي:** يقيس هذا المؤشر "المسارات العشوائية المستقلة المتبقية".
- عندما نختبر غياب التكامل (r=0) لمتغيرين، فنحن نبحث عن مسارين مستقلين، فتكون القيمة الحرجة عالية.

- بمجرد إثبات وجود علاقة واحدة (r=1)، يصبح المتغيران مربوطين بمسار عشوائي مشترك واحد. تقل العشوائية في النظام، فتنخفض القيمة الحرجة في الخطوة الموالية بشكل كبير.

المحور الرابع: قاموس جوهانسون الاقتصادي (قراءة الرتبة r)

بمجرد توقف الاختبار وعجز القيمة المحسوبة عن تجاوز القيمة الحرجة، نصل إلى القرار النهائي بتحديد رتبة التكامل المشترك (r). وتُقرأ اقتصادياً كالتالي:

r = 0 (الاستقلالية التامة): لا توجد أشعة تكامل. المتغيرات تتباعد عشوائياً. العلاج القياسي هو استخدام نماذج (VAR) في الفروق الأولى.

$n > r > 0 (التكامل المشترك): توجد علاقات توازنية طويلة الأجل. السلاسل تتحرك معاً رغم تقلبات المدى القصير. العلاج هو الانتقال لنماذج (VECM).

r = n (الرتبة الكاملة): السلاسل مستقرة أصلاً في مستوياتها(I(0)) ، أو متطابقة هيكلياً بشكل تام. يمكن استخدام (VAR) في المستويات.

المحور الخامس: ما بعد جوهانسون (قراءة المخرجات وتصحيح الخطأ)

إثبات وجود التكامل هو مجرد البداية. مخرجات البرنامج تقدم لنا أداتين حاسمتين للمرحلة القادمة:

معادلة المدى الطويل (Eigenvectors): تعطينا المعاملات التي تحكم التوازن. ولصياغتها اقتصادياً، يجب نقل المتغيرات للطرف الآخر (عكس إشاراتها) لمعرفة نوع وطبيعة العلاقة (طردية/عكسية).

مصفوفة الأوزان (Weights / Loadings): هي بوابتنا نحو نموذج (VECM). تمثل هذه المعلمات "سرعة التعديل" (\alpha)، وهي القوة الخفية التي تجذب المتغيرات وتجبرها على تصحيح مسارها والعودة إلى التوازن الطويل الأجل في حال حدوث أي صدمة مفاجئة في الأجل القصير.